104年公務人員特種考試警察人員、一般警察人員考試及104年特種考試交通事業鐵路人員、退除役軍人轉任公務人員考試試題

等　　別：高員三級鐵路人員考試
類 科 別：電力工程、電子工程
科　　目：工程數學
考試時間：2小時　　　　座號：＿＿＿＿＿＿

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50分）

㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、設矩陣 $A=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$，

㈠求 A 的特徵值（eigenvalues）。（5分）

㈡求 A 的特徵向量（eigenvectors）。（5分）

㈢求 A^{20}。（5分）

二、考慮有一個週期性函數 $f(x)=\begin{cases} x^2 & 0<x<1 \\ 1 & 1\le x<4 \end{cases}$，週期為4，請將 $f(x)$ 表示成傅立葉三角級數（Fourier trigonometric series）。（15分）

三、請利用留數（residue）求 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2x-5}{(x+1)(x^2+4)}dx$ 之值。（10分）

四、若 X 與 Y 是兩隨機變數（random variables），滿足 $E[X]=0$，$E[Y]=-1$，X 的均方差（variance）$\sigma_X^2=2$，$E[Y^2]=4$，$E[XY]=-2$。設隨機變數 W 與 U 分別為 $W=2X+Y$，$U=-X-3Y$。（E[*]表示*的期望值（mean value））。求：

㈠ $E[W^2]$。（3分）

㈡ $E[WU]$。（3分）

㈢ Y 的均方差（variance）：σ_Y^2。（4分）

乙、測驗題部分：（50 分）　　　　　　　　代號：6708

㈠本試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

㈡共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 設 $\mathbf{v}(t)$為一向量函數，若已知其長度為一非零常數，則下列何者為不可能？

(A)$\mathbf{v}'(t)$為零向量　(B)$\mathbf{v}'(t)$和 $\mathbf{v}(t)$正交

(C)$\mathbf{v}'(t)$為非零向量且平行於 $\mathbf{v}(t)$　(D)$\mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{v}(t)$為常數（註："·"表內積運算）

2 令向量場 $F = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + 2z^2\mathbf{k}$，則在（1, 1, -1）處的散度（divergence）$\nabla\cdot F$ 為何？

(A)-1　(B)0　(C)4　(D)8

3 若 $\boldsymbol{u} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ 且 $\boldsymbol{v} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k}$，則 $\nabla\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$為：

(A)$\boldsymbol{v}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{u})$　(B)$2xy + 2yz + 2zx$　(C)$\boldsymbol{u}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{v})$　(D)$xy + yz + zx$

4 若 $F = 2x\cos(2y)\,\mathbf{i} - 2x^2\sin(2y)\,\mathbf{j}$，$C$ 為從（1, π）到（2, π）之某一曲線，求 $\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{R}$：

(A)3　(B)6　(C)4-cos(2)　(D)4+cos(2)

5 下列何者是正交矩陣（orthogonal matrix）？

(A)$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$　(B)$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$　(C)$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$　(D)$\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

6 $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$，則 A^{-1} 的行列式值（determinant）為何？

(A)0.1　(B)10　(C)-10　(D)-0.1

7 若矩陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 0 & -12 \end{bmatrix}$，則 A 的零空間（nullspace）之維度為：

(A)1　(B)2　(C)3　(D)4

8 一矩陣 $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$，下列何者不是矩陣 A 的特徵向量（characteristic vector）？

(A)$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$　(B)$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$　(C)$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$　(D)$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

9 設複數 $z = 6 + i8 = re^{i\theta}$，其中 $i = \sqrt{-1}$，則（r, θ）為何？

(A)(6, 8) (B)(6, $\tan^{-1}$(8)) (C)(8, $\tan^{-1}$(6)) (D)(10, $\tan^{-1}$(4/3))

10 令 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 為一複數級數（complex series），則下列敘述何者為錯誤？（註：答案中 q 是一個小於 1 的定值，N 是一個正數）

(A)若 $\sqrt[n]{|z_n|} \le q < 1, \forall n > N$，則此級數絕對收斂（absolutely convergent）

(B)若 $\sqrt[n]{|z_n|} < 1, \forall n > N$，則此級數收斂

(C)若 $\sqrt[n]{|z_n|} = 1, \forall n > N$，則此級數發散

(D)若 $\sqrt[n]{|z_n|} > 1, \forall n > N$，則此級數發散

11 令 $g(z) = \dfrac{1}{z}$，其中 $z \ne 0$，若 $z = x + iy$，則有關 $g(z)$ 的敘述何者正確？

(A)實部為 $-\dfrac{x}{x^2+y^2}$ (B)實部為 $-\dfrac{y}{x^2+y^2}$ (C)虛部為 $-\dfrac{x}{x^2+y^2}$ (D)虛部為 $-\dfrac{y}{x^2+y^2}$

12 下列選項中 c_1、c_2 為任意常數。解微分方程式 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2.5xy - 2y = 0$：

(A) $y = c_1\sqrt{x} + c_2x^4$ (B) $y = \dfrac{c_1}{\sqrt{x}} + c_2x^4$ (C) $y = c_1\sqrt{x} + c_2x^{-4}$ (D) $y = \dfrac{c_1}{\sqrt{x}} + c_2x^{-4}$

13 求解微分方程 $\dfrac{dr}{d\theta} = b[(\dfrac{dr}{d\theta})\cos\theta + r\sin\theta], r(\dfrac{\pi}{2}) = \pi, 0 < b < 1$：

(A) $r = \pi(1 - b\cos\theta)$ (B) $r = \pi(1 + b\cos\theta)$ (C) $r = \pi(b - \cos\theta)$ (D) $r = b(\pi - b\cos\theta)$

14 一微分方程式 $(x^2 - x)y'' - xy' + y = 0$，已知有一解為 $y_1 = x$，則下列何者為正確？

(A)另一解為 $y_2 = x\ln x + 1$ 且 y_2 與 y_1 為線性相依 (B)另一解為 $y_2 = x\ln x + x$ 且 y_2 與 y_1 為線性相依

(C)另一解為 $y_2 = x\ln x + 1$ 且 y_2 與 y_1 為線性獨立 (D)另一解為 $y_2 = x\ln x + x$ 且 y_2 與 y_1 為線性獨立

15 定義函數 $f(t)$ 之拉氏轉換（Laplace transform）$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$，令 $L\{f(t)\} = \dfrac{(s^2-4)e^{-s}}{(s^2+4)^2}$，則 $f(t)$ 為何？其中 $u(t)$ 為單位步階（unit step）函數。

(A) $[(t-1)\cos 2(t-1)]u(t-1)$ (B) $(t-1)\cos 2(t-1)$

(C) $(t-1)[\cos 2t - 2\sin 2t]$ (D) $(t-1)[\cos 2t - 2\sin 2t]u(t-1)$

16 設 $y=a(t)$ 為 $y''(t)+4y'(t)+3y(t)=6$ 之解，則 $\lim_{t\to\infty} a(t)$ 之值為何？

(A)0 (B)1 (C)2 (D)4

17 定義傅立葉轉換（Fourier transform）為 $F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$，其中 $i=\sqrt{-1}$，若 $f(x)$ 之傅立葉轉換為 $F(\omega)=i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\cos(\omega)-1}{\omega}$，試問 $f(x)$ 為何？

(A) $f(x)=\begin{cases} x, & \text{if } 0<x<2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

(B) $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & \text{if } x>0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

(C) $f(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & \text{if } x>0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

(D) $f(x)=\begin{cases} -1, & \text{if } -1<x<0 \\ 1, & \text{if } 0<x<1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

18 投擲一個公正的硬幣 5 次，求正好 3 次正面朝上的機率為何？

(A)3/8 (B)5/16 (C)5/8 (D)11/16

19 兩離散隨機變數 X、Y 之結合機率為 $P(X=x, Y=y)=A(2x+3y)$，其中 $x=1, 2$；$y=1, 2, 3$，則 $A=$？

(A) $\frac{1}{54}$ (B) $\frac{1}{36}$ (C) $\frac{1}{24}$ (D) $\frac{1}{12}$

20 已知某一電話總機在單位時間內收到之電話數目遵守平均每分鐘 4 通之 Poisson 分布，令 X 表示收到 2 通電話之等待時間（分鐘），求 $P(X\le 1)$ 為何？

(A) $1-4e^{-2}$ (B) $1-5e^{-2}$ (C) $1-4e^{-4}$ (D) $1-5e^{-4}$

測驗題標準答案更正

考試名稱：104年公務人員特種考試警察人員考試、104年公務人員特種考試一般警察人員考試、104年特種考試交通事業鐵路人員考試及104年特種考試退除役軍人轉任公務人員考試

類科名稱：電力工程、電子工程

科目名稱：工程數學

單選題數：20題　　單選每題配分：2.50分

複選題數：　　複選每題配分：

標準答案：答案標註#者，表該題有更正答案，其更正內容詳見備註。

題號	第1題	第2題	第3題	第4題	第5題	第6題	第7題	第8題	第9題	第10題
答案	C	B	B	A	C	A	B	C	D	#

題號	第11題	第12題	第13題	第14題	第15題	第16題	第17題	第18題	第19題	第20題
答案	D	#	A	C	A	C	D	B	A	D

題號	第21題	第22題	第23題	第24題	第25題	第26題	第27題	第28題	第29題	第30題
答案										

題號	第31題	第32題	第33題	第34題	第35題	第36題	第37題	第38題	第39題	第40題
答案										

題號	第41題	第42題	第43題	第44題	第45題	第46題	第47題	第48題	第49題	第50題
答案										

題號	第51題	第52題	第53題	第54題	第55題	第56題	第57題	第58題	第59題	第60題
答案										

題號	第61題	第62題	第63題	第64題	第65題	第66題	第67題	第68題	第69題	第70題
答案										

題號	第71題	第72題	第73題	第74題	第75題	第76題	第77題	第78題	第79題	第80題
答案										

題號	第81題	第82題	第83題	第84題	第85題	第86題	第87題	第88題	第89題	第90題
答案										

題號	第91題	第92題	第93題	第94題	第95題	第96題	第97題	第98題	第99題	第100題
答案										

備　　註：第10題答Ｂ或Ｃ或BC者均給分，第12題一律給分。